Prop: $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo

supponiamo che in ogni punto di I esistano derivata destra e sinistra (non necessariamente uguali).

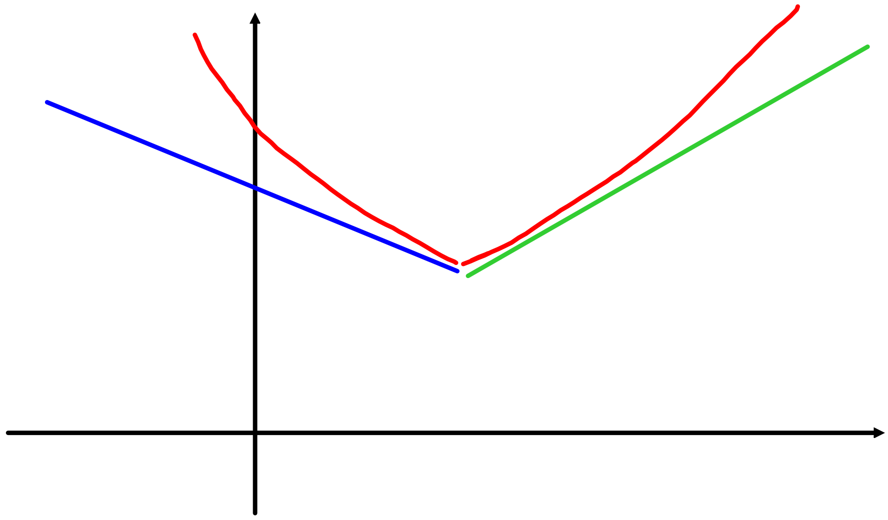
f è convessa in I se in ogni punto di I il grafico di f è sopra le due semi-tangenti cioè

semi-tangente destra

$$f(x) \geq f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0)$$

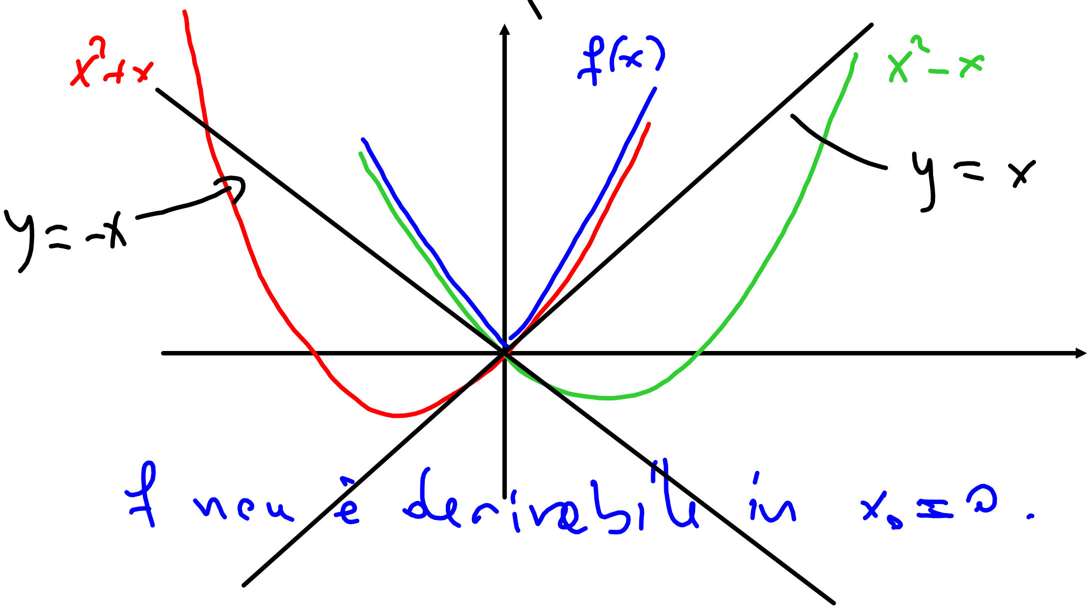
$$f(x) \geq f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0)$$

semi-tangente sinistra.



Es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 - x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$



f non è derivabile in $x_0 = 0$.

f è continua in 0.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0).$$

se $x > 0$ $\quad f'(x) = 2x + 1$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1$$

se $x < 0$ $\quad f'(x) = 2x - 1$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = -1$$

f non è derivabile in 0.

semitangente destra

$f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0)$ $\quad x_0 = 0$

$0 + 1 \cdot x = x$

semitangente sinistra

$f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0)$

$0 + (-1) \cdot x = -x$

devo verificare che

$$f(x) \geq x \quad \forall x$$

e che $f(x) \geq -x \quad \forall x$

dovete verificare che

$$\begin{cases} x^2 + x \geq x & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 - x \geq x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

grafico è sopra la semitangente destra.

ovvie

$$\begin{cases} x^2 + x \geq -x & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 - x \geq -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

verifica per la
semitangente sinistra.

Es: $f(x) = e^{-|x|}$

è convessa?

Se $x > 0$ $f(x) = e^{-x}$

Se $x < 0$ $f(x) = e^{x}$

se $x>0$ $f'(x) = -e^{-x}$

se $x<0$ $f'(x) = e^{x}$

---

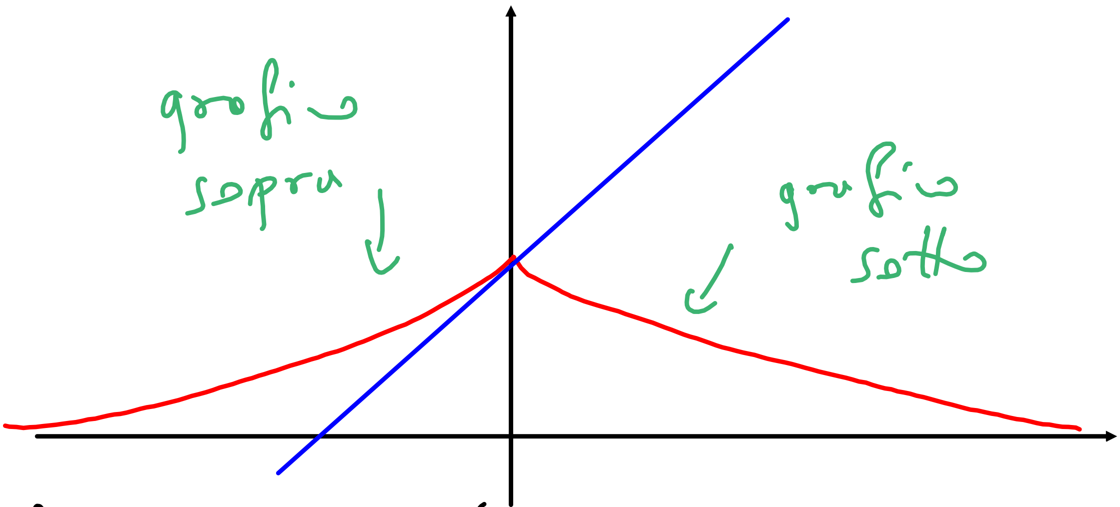
se $x>0$ $f''(x) = e^{-x}$

se $x<0$ $f''(x) = e^{x}$

segno di f''?

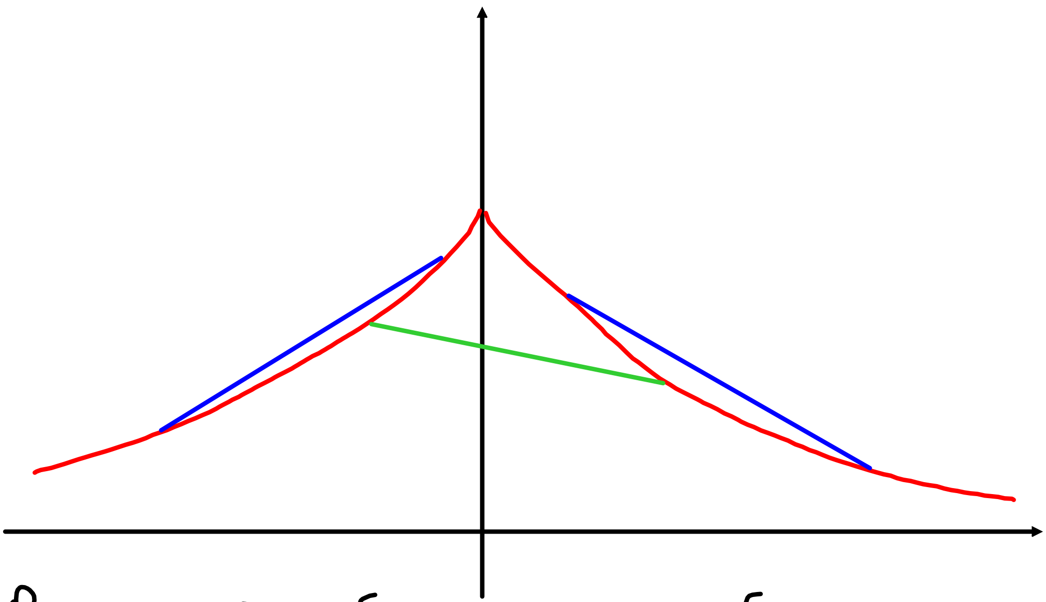
$f''(x)>0$ $\forall x>0$

e $\forall x<0$.



f non è derivabile in 0

$f'_-(0) = 1 \qquad f'_+(0) = -1$



f non è né concava né convessa nel suo dominio $\mathbb{R}$

Potete dire che f

è convessa in $(-\infty, 0]$

e convessa in $[0, +\infty)$.

ma non in $\mathbb{R}$.

Es: $f(x) = x^4$

è convessa ?

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3$ $\quad f''(x) = 12x^2$

$12x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ è convessa

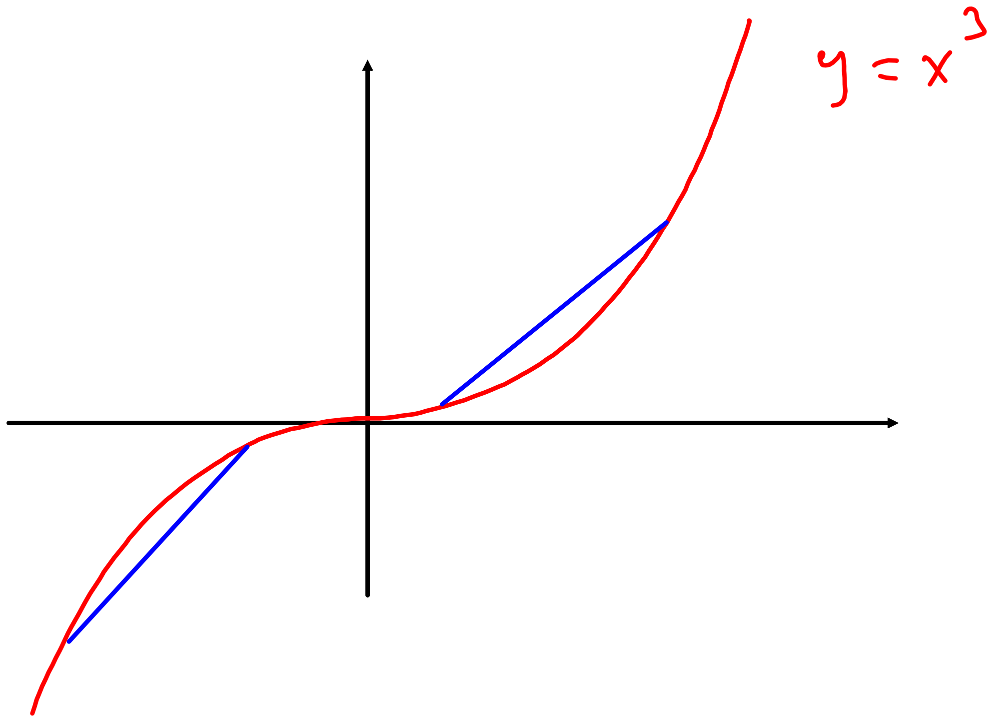
Es: $f(x) = x^3 \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 \quad f''(x) = 6x$

$6x \geq 0 \iff x \geq 0$

f è convessa in $[0, +\infty)$

concava in $(-\infty, 0]$



$y = x^3$

Punto di flesso

Def: Se f è continua in x_0,

se esiste $f'(x_0)$ e

f è convessa in un intorno sinis.
di x_0 e concava in un intorno
destro di x_0 (o viceversa)
allora x_0 si dice punto di
flesso.

Es: $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$

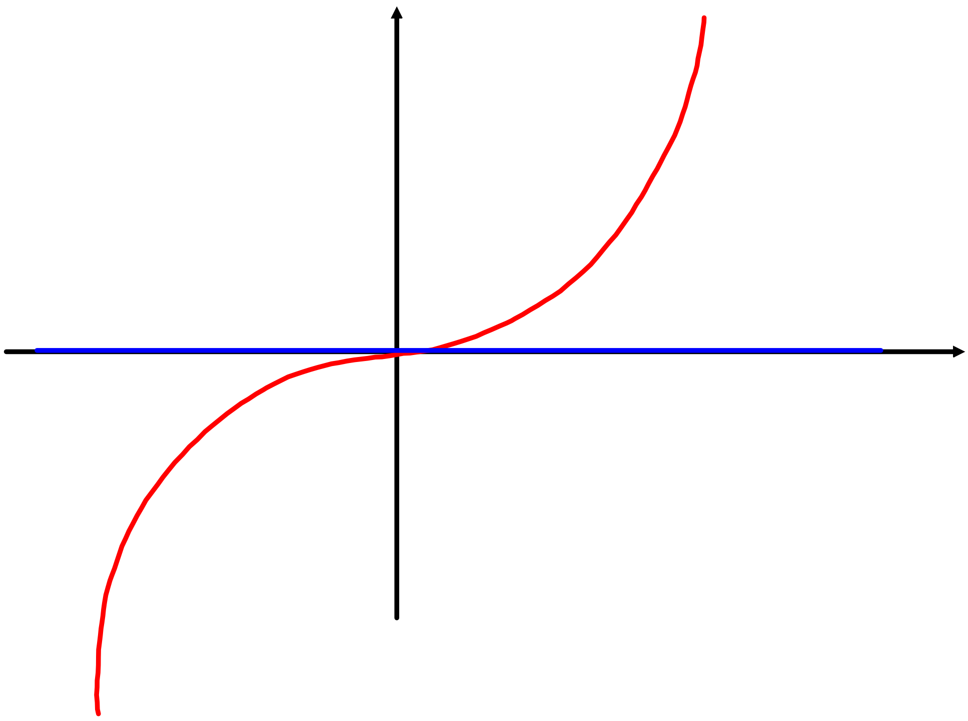
$f''(x) \geq 0$ se $x \geq 0$

$f''(x) \leq 0$ se $x \leq 0$

f è concava in $(-\infty, 0]$

f è convessa in $[0, +\infty)$

$\Rightarrow$ $x_0 = 0$ è punto di flesso.



Es: $f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\sin x$

$f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

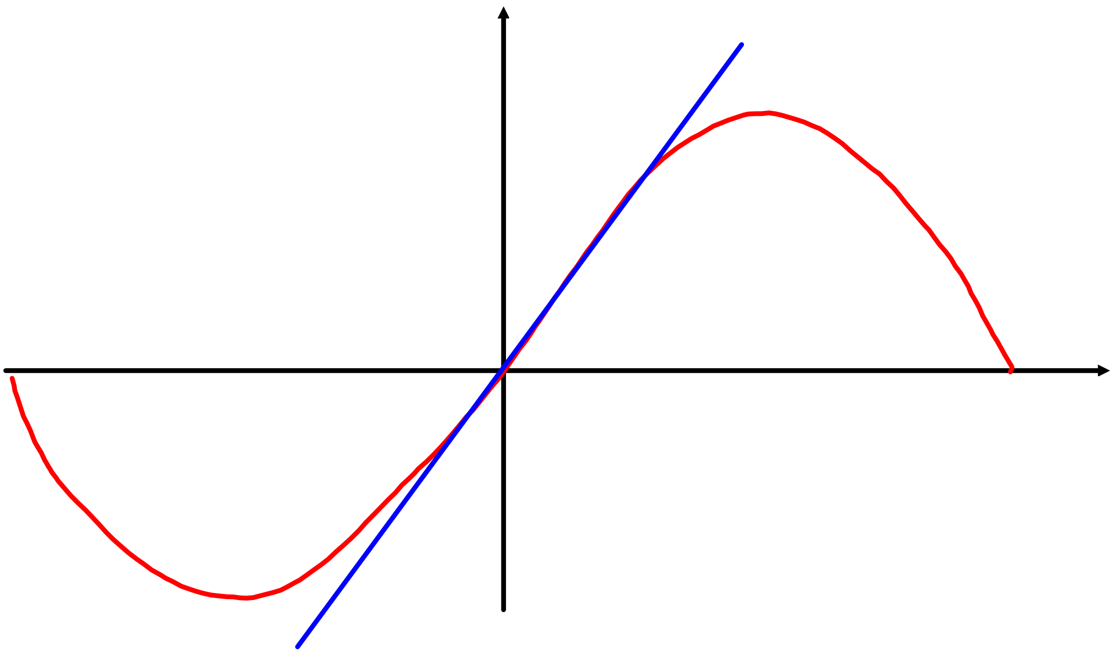
$-\sin x \geq 0 \qquad \sin x \leq 0$

$x \in [-\pi, 0]$

f è convessa in $[-\pi, 0]$

concava in $[0, \pi]$

$x_0 = 0$ è punto di flesso.

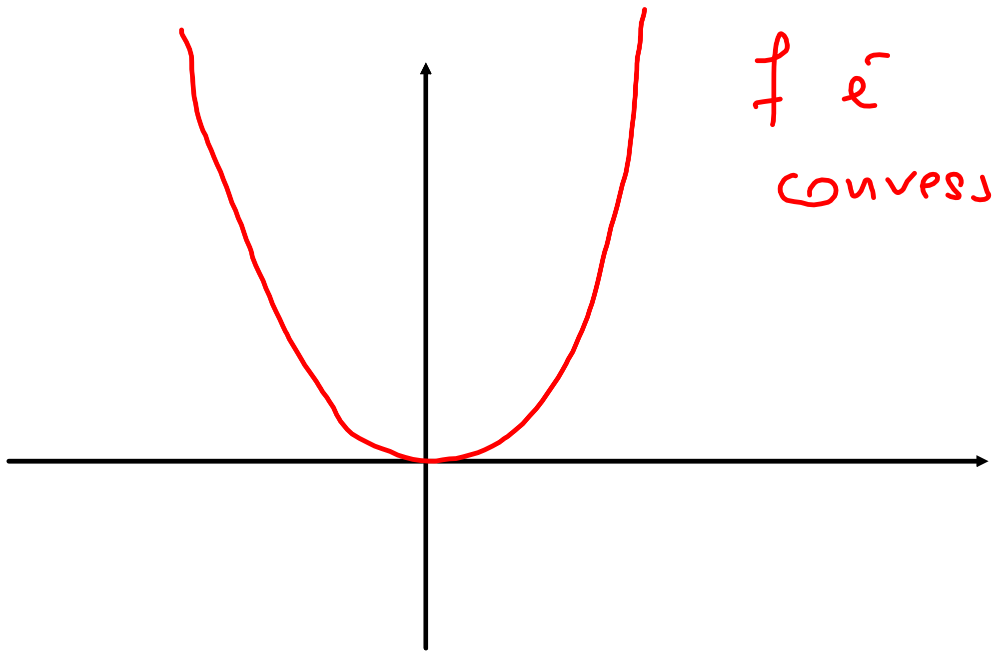


Oss: Se f è derivabile 2 volte
e x_0 è punto di flesso
allora $f''(x_0) = 0$.
È condizione solo necessaria.

Es: $f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3$ $\quad f''(x) = 12x^2$

$f''(0) = 0$

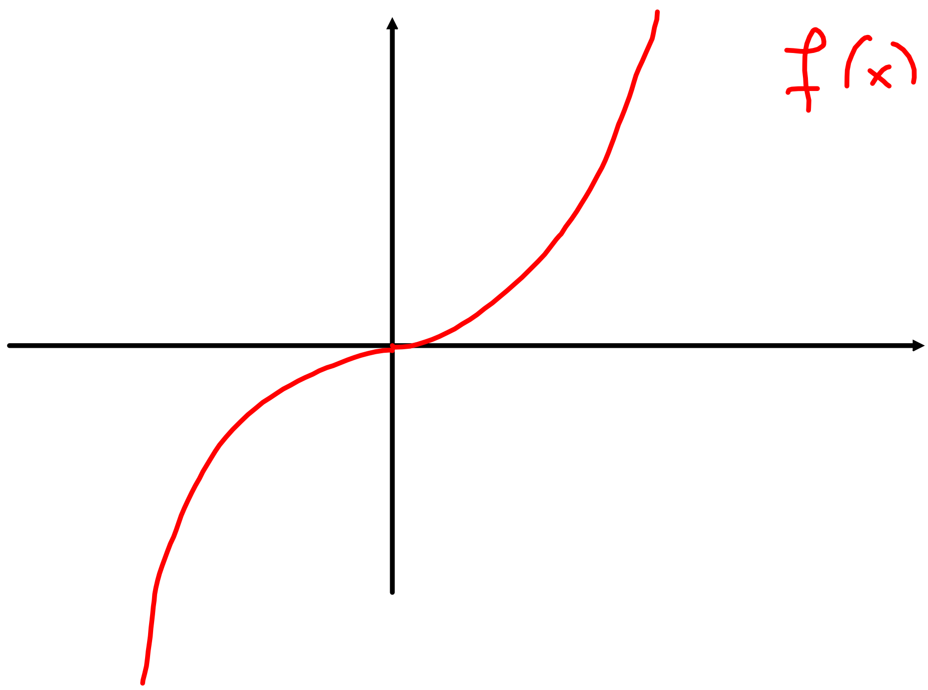


f è convessa

Possono esistere flessi dove la funzione non ha derivata seconda.

Es: $f(x) = x\,|x|$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$



f(x)

se $x>0$ $\quad f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$

se $x<0$ $\quad f'(x) = -2x$, $f''(x) = -2$

f è convessa in $(0,+\infty)$

f è concava in $(-\infty,0)$

$\exists\ f'(0)$?

f è continua in 0

$f'_+(0) = 2 \cdot 0 = 0$

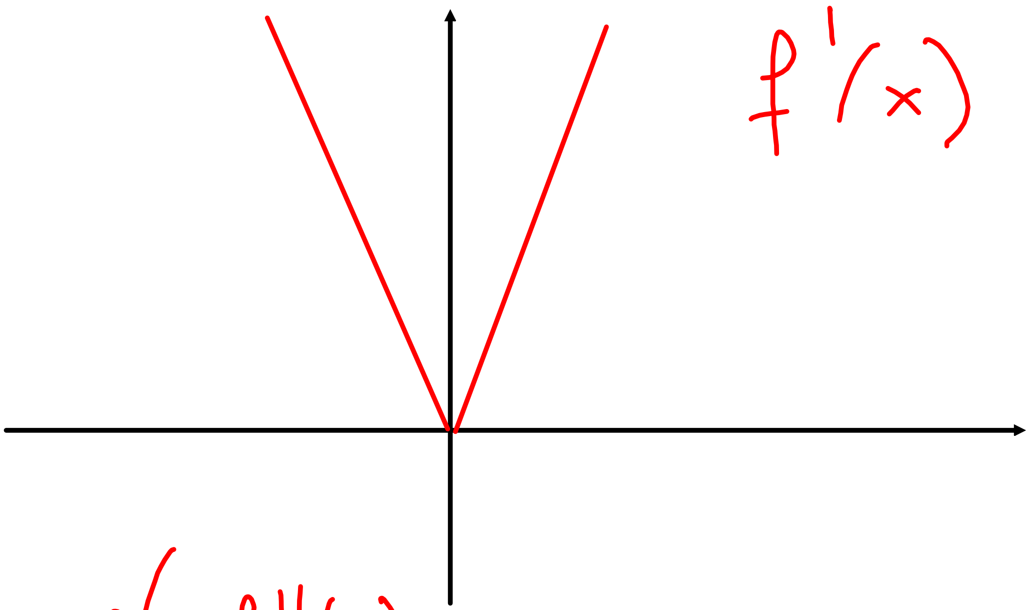
$$f'_-(0) = -2 \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad f'_+(0) = f'_-(0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \exists \; f'(0) = 0.$$

$x_0 = 0$ è punto di flesso.

$\exists \; f''(0)$?



$\Rightarrow \nexists f''(0).$

Es: $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3}$

$f''(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right) x^{-5/3} = -\frac{2}{9} x^{-5/3}$

f non è derivabile in $x_0 = 0$

$f'(0) = +\infty$ perché?

f è continua in 0

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3} x^{-2/3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$f''(x) \geq 0$ cioè

$-\frac{2}{9} x^{-5/3} \geq 0 \qquad x^{-5/3} \leq 0$

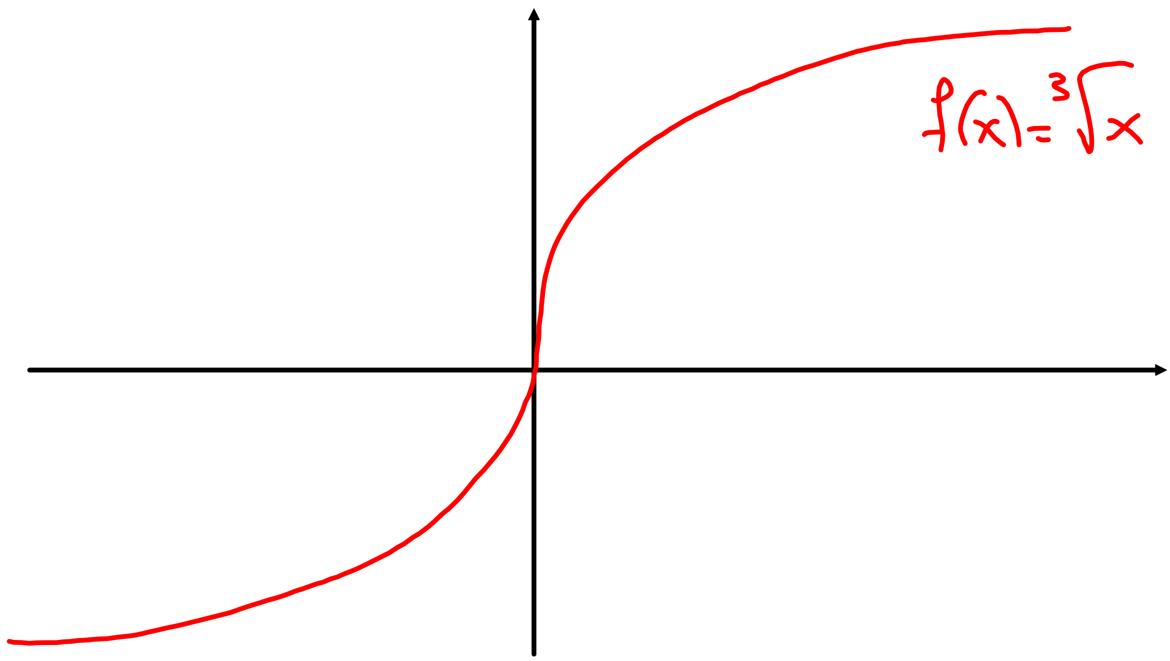
$x < 0$

f è convessa in $(-\infty, 0)$

concava in $(0, +\infty)$

$x_0 = 0$ è punto di flesso

con tangente verticale.


$f(x) = \sqrt[3]{x}$

Studiare

$$f(x) = e^{1/x}$$

insieme di definizione

$$x \neq 0 \qquad \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{1/x} = e^{\frac{1}{-\infty}} = e^{0} = 1$$

asintoto orizzontale $y = 1$

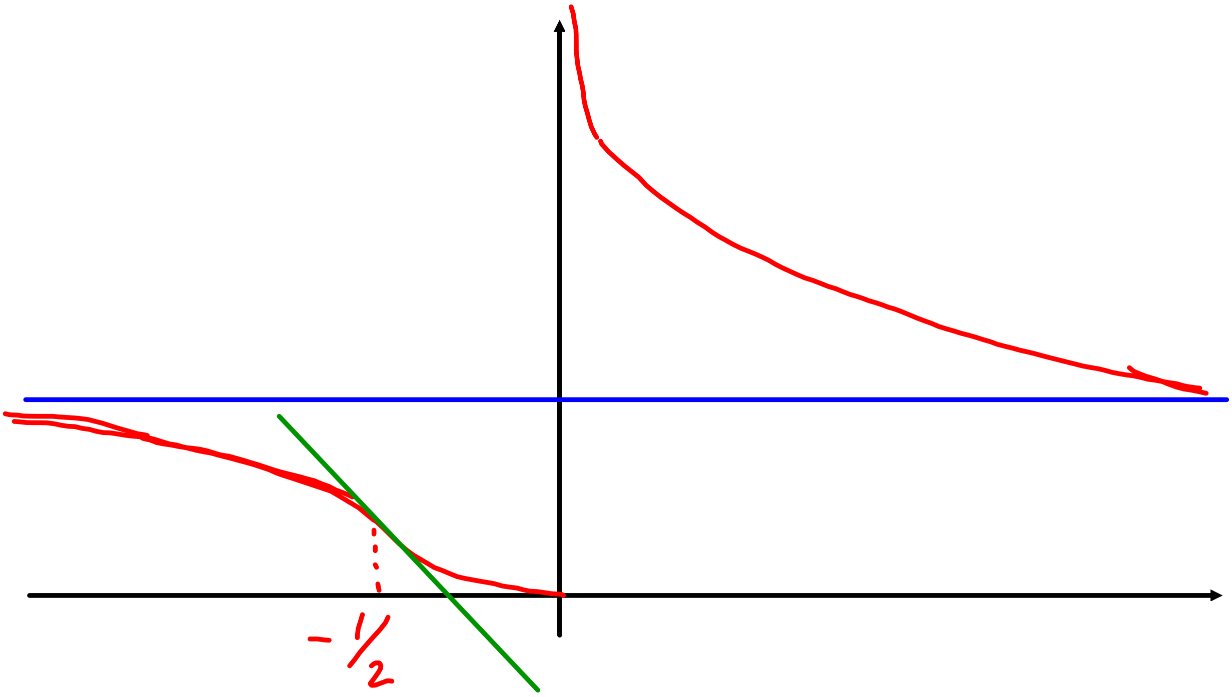
$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = e^{1/0^-} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = e^{1/0^+} = e^{+\infty} = +\infty$$

asintoto verticale $x=0$

$$\lim_{x\to +\infty} e^{1/x} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^{0} = 1$$

asintoto orizz. $y=1$


$-1/2$

$\sup f = +\infty$

$\inf f = 0$ perché $f(x) > 0 \ \forall x$

e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

f non ha minimo perché

se lo avesse dovrebbe essere

$\min f = \inf f = 0$

ma non è mai $e^{1/x} = 0$.

monotonia

$$f'(x) = e^{1/x} (-x)^{-2} = \frac{-e^{1/x}}{x^2} < 0$$

$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

quindi f è strett. decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$

non ci sono max e min locali perché il dominio è aperto

f è derivabile in tutto il dominio e $f'(x) \neq 0$ sempre.

Convessità

$$f'(x) = -x^{-2} e^{1/x}$$

$$f''(x) = -\cdot(-2)\, x^{-3} \cdot e^{1/x} + x^{-2} x^{-2} e^{1/x}$$

$$= 2x^{-3} e^{1/x} + x^{-4} e^{1/x} =$$

$$= e^{1/x} x^{-4} (2x+1) = \frac{e^{1/x}(2x+1)}{x^4}$$

$$f''(x) \geq 0 \iff 2x+1 \geq 0$$

$$2x \geq -1 \qquad x \geq -\frac{1}{2}$$

f è concava in $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

è convessa in $\left[-\frac{1}{2}, 0\right)$

è convessa in $(0, +\infty)$

$x = -\frac{1}{2}$ è punto di flesso.

Es: $f(x) = \sqrt{1 - \log(1-x)}$

insieme di definizione

$1 - x > 0 \qquad x < 1$

$1 - \log(1-x) \geq 0$

$1 \geq \log(1-x)$

$e \geq 1 - x \implies x \geq 1 - e$

dominio $\quad [1-e, 1)$

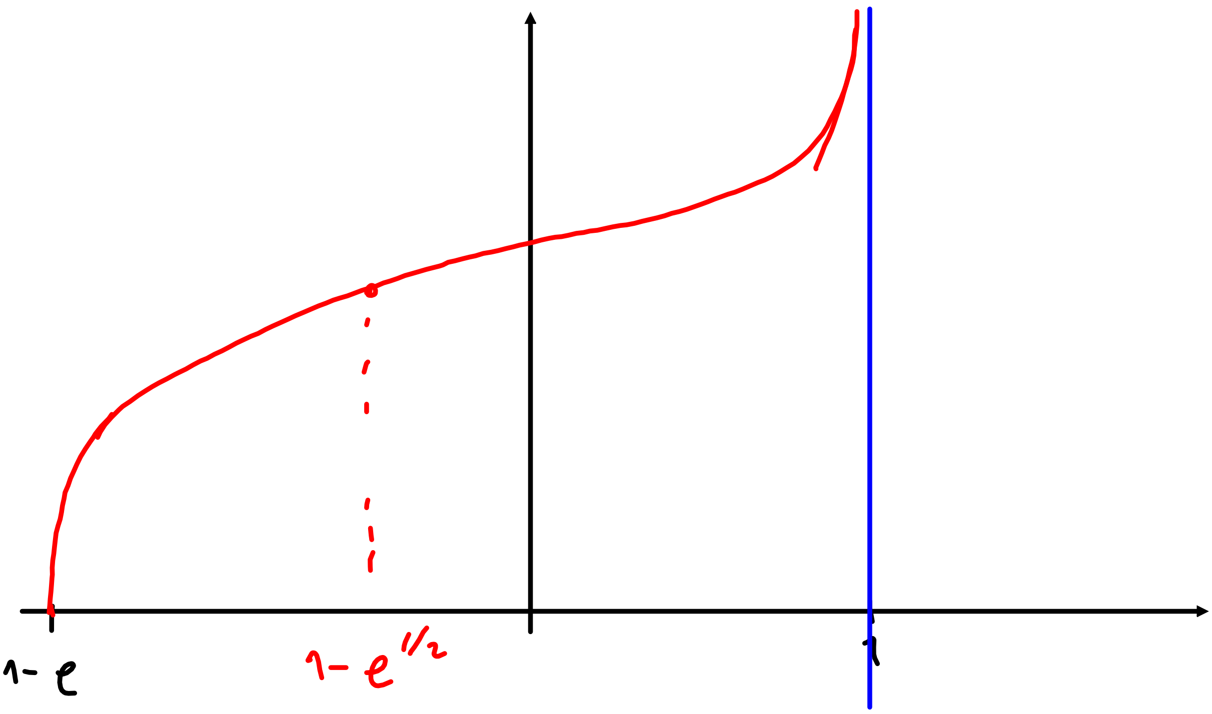
$$f(1-e) = \sqrt{1 - \log(1-(1-e))} =$$

$$= \sqrt{1 - \log e} = \sqrt{0} = 0$$

$$\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1 - \log(1-x)} =$$

$$= \sqrt{1 - \log(0^+)} = \sqrt{1 + \infty} = +\infty$$

asintoto verticale $x = 1$.



$\sup f = +\infty$

$\min f = 0$ perché $f(x) \geq 0$

$\forall x \in$ dominio e $f(1-e) = 0$.

$1-e$ è punto di minimo.

$$f(x) = \left[1 - \log(1-x)\right]^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \log(1-x)\right]^{-1/2}\left(-\frac{1}{1-x}(-1)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x}\,\left[1-\log(1-x)\right]^{-1/2} > 0$$

segno

$$\frac{1}{1-x} > 0 \iff 1-x > 0 \iff x < 1$$

$\Rightarrow f'(x) > 0$ sempre.

$$f'(x) = \frac{1}{2(1-x)\sqrt{1-\log(1-x)}}$$

Se $x = 1-e$ non posso scrivere la derivata. Quindi f è derivabile in $(1-e, 1)$.

Controllo in $1-e$.

Dato che f è continua in $1-e$ calcolo

$$\lim_{x \to 1-e^+} f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{1-(1-e)} \cdot \frac{1}{\sqrt{0^+}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{0^+} = +\infty .$$

tangente verticale in $x = 1-e$

convessità.

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \log(1-x)\right)^{-1/2} \frac{1}{1-x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left\{ \left[1-\log(1-x)\right]^{-3/2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{-1\,(-1)}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x} + \left[1-\log(1-x)\right]^{-1/2}\frac{-1\,(-1)}{(1-x)^2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\left[1-\log(1-x)\right]^{-3/2}}_{>0}\underbrace{\frac{1}{(1-x)^2}}_{>0}\left\{-\frac{1}{2}+1-\log(1-x)\right\}$$

segno di f''

$f''(x) > 0 \iff$

$\frac{1}{2} - \log(1-x) > 0$

$\frac{1}{2} > \log(1-x) \qquad e^{1/2} > 1-x$

$x > 1 - e^{1/2}$

f è concava in $[1-e, 1-e^{1/2}]$

convessa in $[1-e^{1/2}, 1)$

$1-e^{1/2}$ è punto di flesso